

Zadanie 1. Wyznacz trójnóg Freneta oraz krzywiznę i torsję następujących krzywych:

(1) $t \mapsto (\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{\sqrt{2}}{2}t), t \in (-1, 1),$

(2) $t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt),$

(3) $t \mapsto (\frac{1}{2}t^2, \frac{\sqrt{2}}{3}t^3, \frac{1}{4}t^4),$

(4) $t \mapsto (2 \ln t, 2t, \frac{1}{2}t^2), t > 0,$

(5) $t \mapsto (t, t^2, t^3).$

Zadanie 2. Wyznacz kąt, z jakim krzywa Vivianiego dla sfery o promieniu $2a$ przecina się ze sobą. Wyznacz jej krzywiznę i torsję.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli wszystkie wektory binormalne do danej krzywej są równoległe, to jest ona płaska.

Zadanie 4. Wykaż, że płaszczyzny normalne do krzywej $t \mapsto (\sin^2 t, \sin t \cos t, \cos t)$ przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 5. W każdym punkcie krzywej $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin \frac{1}{2}t)$ odłożono na osi normalnej odcinek o długości $\sqrt{1 + \sin^2 \frac{1}{2}t}$. Wykaż, że końce tych odcinków tworzą sinusoidę.

Zadanie 6. Wykaż, że odległość między punktami przecięcia prostych stycznej i normalnej do krzywej $t \mapsto (2r(\ln \sin t - \sin^2 t), r \sin t), t \in (0, \frac{\pi}{2}),$ z osią OX jest równa $2r$.

Zadanie 7. Załóżmy, że krzywa α ma stałą krzywiznę równą κ . Wykaż, że krzywa

$$\beta(t) = \int_0^t B_\alpha(s) ds$$

ma stałą torsję równą κ .