

**Zadanie 1.** Wyznacz wzór na rzut stereograficzny dwuwymiarowej sfery na płaszczyznę.

**Zadanie 2 (CYKLOIDA).** (1) Rozważmy na płaszczyźnie okrąg o środku w punkcie  $(0, r)$  i promieniu  $r$ . Niech  $P$  będzie punktem na tym okręgu o współrzędnych równych  $(0, 0)$ . Wyznacz parametryzację krzywej, po której porusza się punkt  $P$ , gdy okrąg zaczyna toczyć się w prawą stronę.

(2) Wyznacz długość jednego z “łuków” tak otrzymanej krzywej.

**Zadanie 3 (†).** Punkt materialny o masie  $m$  toczy się po łuku “odwróconej cykloidy”  $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(\cos t - 1))$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Wykaż, że czas, w jakim ten punkt osiągnie położenie końcowe nie zależy od jego położenia początkowego.

**Zadanie 4 (ASTEROIDA).** (1) Po wewnętrznej stronie okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu  $R$  toczy się okrąg o promieniu  $r = R/4$ . Wyznacz parametryzację krzywej, po której porusza się punkt  $P = (R, 0)$  mniejszego okręgu będący początkowym punktem styczności obu okręgów.

(2) Sprawdź, że asteroidę można opisać równaniem uwikłanym  $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$ .

(3) Jak zmieni się krzywa, gdy  $R/r = 2, 3$ ? Gdy  $R/r$  jest liczbą niewymierną?

**Zadanie 5 (ROZETA CZTEROLISTNA).** Jeden koniec odcinka o długości  $2a$  porusza się po osi  $Ox$ , a drugi po osi  $Oy$ . Wyznacz parametryzację krzywej utworzonej przez punkty przecięcia tego odcinka z prostymi do niego prostopadłymi i przechodzącymi przez początek układu współrzędnych.

**Zadanie 6 (KRZYWA VIVIANIEGO).** Wyznacz parametryzację krzywej utworzonej przez punkty wspólne sfery  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  oraz walca  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ .

**Zadanie 7 (KARDIOIDA).** Sprawdź, że krzywa

$$t \mapsto \left( \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \frac{4at}{(1+t^2)^2} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

we współrzędnych biegunowych jest opisana przez  $\rho(\phi) = a(1 + \cos \phi)$ .

**Zadanie 8.** Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą. Wykaż, że krzywa opisana przez

$$t \mapsto (a \cos t \sin f(t), a \sin t \sin f(t), a \cos f(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

leży na sferze.