Zadanie 1. Oblicz:

(1) $\sum_{k=1}^{5} 2^k$,

(2) $\sum_{k=1}^{7} (2k-1)$,

(3) $\sum_{i=2}^{5} \frac{i}{i+1}$,

(4) $\sum_{i=2}^{8} (-1)^k k^2$.

Zadanie 2. Zapisz poniższe wyrażenia za pomocą znaku Σ.

(1) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[5]{5} + \sqrt[6]{6} + \sqrt[7]{7} + \sqrt[8]{8}$

(2) $5! + 6! + 7! + 8! + 9!$

(3) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$

(4) $a + (a+1)^2 + (a+2)^3 + \cdots + (a+2n)^{2n+1}$

Zadanie 3. Dana jest macierz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Zapisz następujące wyrażenia bez użycia symboli Σ oraz Π:

(1) $\sum_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{3} a_{ij}$,

(2) $\prod_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_{ij}$,

(3) $\sum_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{i} a_{ij}$,

(4) $\prod_{j=1}^{3} \sum_{i=j}^{3} a_{ij}$.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzą następujące równości:

(1) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(2) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(3) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

(4) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

(5) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$,

(6) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$,

(7) $1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$,

(8) $\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 3^n - 1$,

Zadanie 5. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ jest prawdą, że:

(1) $4 \mid 5^n - 1$,

(2) $25 \mid 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$,

(3) $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$,

(4) $13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}$,

(5) $6 \mid n^3 + 5n$,

(6) $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$.

Zadanie 6. Sprawdź dla jakich liczb naturalnych prawdziwe są następujące nierówności:

(1) $2n + 1 < 2^n$,

(2) $n^2 < 3^{n-1}$,

(3) $n^3 < 2^n$,

(4) $(n + 1)n < n^{n+1}$,

(5) $n^2 \cdot 2^n < n^2 + n - 2$,

(6) $3^n < n^2 + 2n - 4$,

(7) $n^2 + 1 < 2^{n-1}$.

Zadanie 7. Pokaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 0$ liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego jest równa 2^n.

Zadanie 8. Niech $n \geqslant 4$ będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że każdą kwotę złożoną z n złotych można wypłacić monetami dwu- oraz pięciozłotowymi.