Zadanie 1. Wyznacz dziedzinę naturalną funkcji określonych następującymi wzorami:

(1) $\sqrt{-x}$,

(2) $(-x^2-2x+8)^{-\frac{3}{2}}$,

(3) $\log_2(\sin x)$,

(4) $\sqrt{x^2-5x+6}+\frac{1}{-x^2+3x+4}$,

(5) $\ln\big(\sin(x-3)\big)+\sqrt{-x^2+16}$.

Zadanie 2. Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, gdzie:

(1) $P=(0,0)$, $f(x)=x^2-10x$,

(2) $P=(\frac{1}{2},\frac{5}{8})$, $f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{7}$,

(3) $P=(3,8)$, $f(x)=2^x$,

(4) $P=(10,-2)$, $f(x)=x^2+x+1$.

Zadanie 3. Niech $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Wyznacz $f(A)$ oraz $f^{-1}(B)$, o ile:

(1) $f(x)=-3x+5$ oraz $A=\{1,2\}$, $(0,3]$, $[1,\infty)$, $B=\{0,4\}$, $(1,4]$, $(1,3)\cup(4,6)$,

(2) $f(x)=x^2+1$ oraz $A=\{-3,-1\}$, $[1,3)$, $(-3,2]$, $B=\{2\}$, $[-1,1)$, $(-\infty,5)$,

(3) $f(x)=-x^2+3x+4$ oraz $A=(-4,3)\cap\mathbb{N}$, $[0,3]\setminus\mathbb{N}$, $(-3,-2)\cup(2,3)$,

(4) $f(x)=|-x^2+x+2|$ oraz $A=\{0,2\}$, $[0,2]$, $(-\infty,-1)\cup[2,\infty)$,

(5) $f(x)=[x]$ oraz $A=(-\frac{3}{5},\frac{4}{7})$, $\{1\}\cup(2,4)$, $\mathbb{N}$, $B=\{3,4,5\}$, $[-1,3]$, $\mathbb{N}$,

(6) $f(x)=1+\sin x$ oraz $B=\{0,1,2\}$,

(7) $f(x)=\log_2(x+2)$ oraz $A=\{0,2,6\}$, $[-\frac{3}{2},0]$, $(0,\infty)$, $B=(-1,3]$, $(-2,-1)\cup(1,2)$,

(8) $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0,\\ x^2+1, & x>0,\end{cases}$ oraz $A=[-1,1)\cup\{2\}$.

Zadanie 4. Niech X, Y będą ustalonymi zbiorami oraz A, $B\subseteq X$. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji $f\colon X\to Y$ zachodzi:

(1) jeśli $A\subseteq B$, to $f(A)\subseteq f(B)$,

(2) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$,

(3) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$,

(4) $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$.

Wykaż, że we wzorach (3) i (4) inkluzji na ogół nie można zastąpić równością.

Zadanie 5. Niech X, Y będą ustalonymi zbiorami oraz C, $D\subseteq Y$. Pokaż, że dla dowolnej funkcji $f\colon X\to Y$ zachodzi:

(1) jeśli $C\subseteq D$, to $f^{-1}(C)\subseteq f^{-1}(D)$,

(2) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$,

(3) $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$,

(4) $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$.

Zadanie 6. Które z poniższych funkcji są injekcjami, surjekcjami, bijekcjami?

(1) $f\colon (\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$

(2) $f\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$

(3) $f\colon (1, \infty) \to (1, \infty)$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

(4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + [x]$,

(5) $f\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = 4^x - 4^{-x}$

(6) $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$

(7) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x + 2, 2x + 1)$

(8) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, xy)$

Zadanie 7. Niech funkcje f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą dane wzorami $f(x) = x + 3$ and $g(x) = x^2$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Wyznacz:

(1) $f(g(x) + 1)$,

(2) $g\big(g(x)\big)$,

(3) $g\big(\frac{1}{2}f(x + 3)\big)$,

(4) $f\big(g\big(f(x)\big)\big)$,

(5) $f\big(3g\big(f(x^4) + g(x)^2\big)\big)$.

Zadanie 8. Wyznacz, o ile istnieją, złożenia $f \circ g$, $g \circ f$, gdzie:

(1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy + x^2$ oraz $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x, \sin x)$,

(2) f, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oraz $f(x, y) = (x + 2y, x - y^2)$, $g(x, y) = (x - y, xy)$,

(3) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (y^2, x^2 - 2x - y)$ oraz $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$.