Zadanie 1. Zapisz poniższe zdania w postaci formuł rachunku zdań.

(1) Zbiór A jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A nie jest nieskończony.

(2) Jeśli $n_0 \in \mathbb{N}$ jest liczbą pierwszą, to o ile n_0 jest liczbą złożoną, n_0 równa się 4.

(3) Jeśli figura A jest czworokątem i A ma wszystkie kąty równe, to z faktu, iż A jest czworokątem wynika, że A ma boki równe.

(4) Jeśli liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ dzieli się przez 3 i dzieli się przez 5, to z faktu, iż n_0 nie dzieli się przez 3 wynika, że n_0 nie dzieli się przez 5.

(5) Jeśli z założenia, że funkcja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ wynika, że jest ona ciągła w tym punkcie, to z założenia, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0 wynika, iż nie jest ona różniczkowalna w tym punkcie.

(6) Jeśli nie jest prawdą, że albo prosta k jest równoległa do prostej l, albo prosta m nie jest równoległa do prostej l, to albo prosta k nie jest równoległa do prostej l, albo prosta m nie jest prostopadła do prostej l.

Zadanie 2. Udowodnij, że poniższe wyrażenia są prawami rachunku zdań.

(1) $p \Rightarrow \big(q \Rightarrow (p \wedge q)\big)$

(2) $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$

(3) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

(4) $\big(\neg(p \vee q)\big) \Leftrightarrow \big((\neg p) \wedge (\neg q)\big)$

(5) $\big((\neg p) \Rightarrow (\neg q)\big) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

(6) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \big((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big)$

(7) $\big((p \wedge q) \Rightarrow r\big) \Leftrightarrow \big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big)$

(8) $(\neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(9) $\big(p \wedge (q \vee r)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$

Zadanie 3. Które z następujących formuł zdaniowych są tautologiami?

(1) $\big((p \vee q) \wedge (\neg p)\big) \Rightarrow q$

(2) $p \Rightarrow \big((\neg p) \vee q\big)$

(3) $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

(4) $\big((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(5) $\big(p \Rightarrow (p \Rightarrow q)\big) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \Rightarrow r\big)$

(6) $\big((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)\big) \Rightarrow \big((p \wedge r) \Rightarrow (q \vee s)\big)$

(7) $\big((p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow q)\big) \Rightarrow \big((p \wedge r) \Rightarrow q\big)$

(8) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \big((p \wedge q) \Leftrightarrow p\big)$

(9) $\big((p \vee q) \Rightarrow r\big) \Rightarrow \big((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)\big)$

(10) $p \Rightarrow \big((\neg p) \Rightarrow q\big)$

(11) $\big((p \wedge q) \Rightarrow r\big) \Rightarrow \big((p \wedge (\neg r)) \Rightarrow (\neg q)\big)$

Zadanie 4. Przetłumacz poniższe zdania na potoczny język polski.

(1) $\forall_x\ (H(x) \wedge \forall_y\ \neg M(x,y)) \Rightarrow U(x)$, gdzie $H(x)$ oznacza "x jest mężczyzną", $M(x,y)$ oznacza "x jest żonaty z y", $U(x)$ oznacza "x jest nieszczęśliwy", zaś x, y przebiegają zbiór wszystkich ludzi.

(2) $\exists_z\ P(z,x) \wedge S(y,z) \wedge W(y)$, gdzie $P(z,x)$ oznacza "z jest rodzicem x", $S(y,z)$ oznacza "y oraz z są rodzeństwem", $W(y)$ oznacza "y jest kobietą", zaś x, y, z przebiegają zbiór wszystkich ludzi.

Zadanie 5. Zapisz poniższe zdania w postaci formuł rachunku predykatów.

(1) Każda liczba naturalna jest nieujemna.

(2) Nie ma największej liczby naturalnej.

(3) Liczby 3 oraz 8 nie mają żadnego wspólnego dzielnika za wyjątkiem liczby 1.

(4) Układ równań

$$\begin{cases} x + 2 = 5 \\ 2x + 4 = 6 \end{cases}$$

nie ma rozwiązań.

(5) Liczby ujemne nie mają pierwiastków kwadratowych.

(6) Każda liczba dodatnia ma dokładnie dwa pierwiastki kwadratowe.

Zadanie 6. Zadecyduj, czy poniższe zdania są prawdziwe czy fałszywe przy założeniu, że zmienne x, y, z przebiegają zbiór liczb całkowitych.

(1) $\forall_x\ \exists_y\ 2x - y = 0$

(2) $\exists_y\ \forall_x\ 2x - y = 0$

(3) $\forall_x\ x < 10 \Rightarrow \forall_y\ (y < x \Rightarrow y < 9)$

(4) $\exists_x\ \exists_y\ x + y = 100$

(5) $\forall_x\ \exists_y\ (y > x \wedge \exists_z\ y + z = 100)$

Co ulega zmianie, gdy x, y, z przebiegają zbiór liczb rzeczywistych?

Zadanie 7. Zaneguj następujące zdania.

(1) $\forall_{i \in I}\ x \in B_i$

(2) $\exists_{M \in \mathbb{R}}\ \forall_{n \in \mathbb{N}}\ |a_n| \leqslant M$

(3) $\exists_{a \in \mathbb{R}}\ \forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{\delta > 0}\ \forall_{x \in \mathbb{R}}\ |x - a| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon$

(4) $\exists_{N \in \mathbb{N}}\ (a_N \neq 9) \vee (\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n > N \Rightarrow a_n = 9)$