Zadanie 1. Wykaż, że następujące funkcje $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ są metrykami w zbiorze $\mathbb{R}^2$.

(1) (METRYKA EUKLIDESOWA) $d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

(2) (METRYKA MAKSIMUM) $d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\big\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\big\}$

(3) (METRYKA TAKSÓWKOWA) $d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

(4) (METRYKA POCZTOWA)

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \begin{cases} d_E\big((x_1, x_2), (p_1, p_2)\big) + d_E\big((p_1, p_2), (y_1, y_2)\big), & (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2), \\ 0, & (x_1, x_2) = (y_1, y_2), \end{cases}$$

gdzie d_E oznacza metrykę euklidesową, zaś $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ jest ustalonym punktem

Zadanie 2. Naszkicuj kulę otwartą $B\big((0, 0), 1\big)$ dla każdej z metryk w Zadaniu 1.

Zadanie 3. (METRYKA DYSKRETNA) Dla zbioru niepustego X rozpatrzmy funkcję $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ określoną wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Wykaż, że (X, d) jest przestrzenią metryczną. Znajdź postać kul otwartych w tej przestrzeni.

Zadanie 4. Niech $X = \big\{f\colon [0, 1] \to \mathbb{R} \,\big|\, f \text{ jest funkcją ciągłą}\big\}$. Zdefiniujmy

$$d(f, g) = \min\big\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\big\}.$$

Wykaż, że (X, d) jest przestrzenią metryczną.

Zadanie 5. Zbadaj otwartość/domkniętość następujących podzbiorów prostej euklidesowej:

(1) $(1, 3)$,

(2) $[1, 3]$,

(3) $[1, 3)$.

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnych dwóch różnych punktów x, y w przestrzeni metrycznej (X, d) istnieją kule otwarte B_1, B_2 takie, że $x \in B_1$, $y \in B_2$ oraz $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.