

Zajęcia nr 9

Program zajęć: ciągłość funkcji, własność Darboux, obliczanie pochodnej funkcji z definicji, techniki obliczania pochodnych

Zadanie 1. Sprawdź, czy następujące funkcje są ciągłe na \mathbb{R} :

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 0 \\ 4x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

Zadanie 2. Dobierz parametry a i b tak aby funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} + ax + b, & 0 < x \leq 3 \\ (x - 3)^2, & x \geq 3 \end{cases}$$

była ciągła na całej prostej rzeczywistej.

Zadanie 3. Uzasadnij, że każdy wielomian nieparzystego stopnia posiada miejsce zerowe.

Zadanie 4. Uzasadnij, że wielomian $P(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ posiada trzy różne miejsca zerowe.

Zadanie 5. Uzasadnij, że równanie $(1 - x) \cos x = \sin x$ ma rozwiązanie znajdujące się w przedziale $(0, 1)$.

Zadanie 6. Uzasadnij, że wśród prostokątów o obwodzie 1 istnieje taki, który ma największe pole. Znajdź ten prostokąt.

Zadanie 7. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f(a)f(b) < 0$. Uzasadnij, że funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale (a, b) i zaprojektuj algorytm wyznaczania tego miejsca zerowego z zadaną dokładnością.

Zadanie 8. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 2$.

Zadanie 9. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie $x_0 = 1$.

Zadanie 10. Zbadaj istnienie pochodnej funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 2, & x < 1 \\ 2x^2 + 4, & x \geq 1 \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 1$.