

## Zajęcia nr 8

**Program zajęć:** pojęcie granicy funkcji, granice jednostronne, definicja ciągłości funkcji

**Zadanie 1.** Wyznacz punkty skupienia następujących zbiorów:

a)  $A = (0, 1)$

b)  $B = (0, 1) \cup (1, 2)$

c)  $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d)  $D = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

**Zadanie 2.** Korzystając z definicji (w sensie Cauchy'ego i w sensie Heinego) pokaż, że  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ , gdzie:

a)  $f(x) = 2x + 1, x_0 = 1, g = 3$

b)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, x_0 = 2, g = \frac{3}{5}$

**Zadanie 3.** Pokaż, że następujące granice nie istnieją:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

**Zadanie 4.** Oblicz następujące granice:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{114x + 1}{x}\right)$

**Zadanie 5.** Oblicz następujące granice:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$

**Zadanie 6.** Oblicz:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{3x^2 + 1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

**Zadanie 7.** Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0. \end{cases}$$

Zbadaj istnienie granicy funkcji  $f$  w punkcie  $x_0 = 0$ . W których punktach funkcja  $f$  jest ciągła?