

Zajęcia nr 6

Program zajęć: kryteria zbieżności szeregów ciąg dalszy, szeregi naprzemienne wraz z oszacowaniem sumy tych szeregów

Zadanie 1. Korzystając z kryterium d'Alemberta, Zbadaj zbieżność następujących szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$$

Zadanie 2. Korzystając z kryterium Cauchy'ego, zbadaj zbieżność następujących szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + 1/n)^n} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg}(n^2 + 1))^n \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n + 1}\right)^n$$
$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3^n} \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$$

Zadanie 3. Korzystając z kryterium zagęszczeniowego pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$

Zadanie 4. Korzystając z kryterium Leibniza, uzasadnij zbieżność następujących szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n + 100}$$

Czy szeregi te są zbieżne bezwzględnie?

Zadanie 5. Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ z dokładnością do 0.01.

Zadanie 6. Wyznacz zbiór tych $x \in \mathbb{R}$ dla których podane szeregi są zbieżne:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x - 2)^n \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 3)^n}{n!} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$