

Zajęcia nr 5

Program zajęć: definicja szeregu nieskończonego, szereg geometryczny, warunek konieczny zbieżności szeregu, kryterium porównawcze

Zadanie 1. Rozpatrując ciąg sum częściowych zbadaj zbieżność następujących szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} 0 \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Zadanie 2. Pokaż, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ i każdego $x \neq 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^m x^n = x \frac{1 - x^m}{1 - x}.$$

Wywnioskuj stąd, że dla $|x| < 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{(1-x)}.$$

Zadanie 3. Pokaż, że

$$0.(9) = 1.$$

Zadanie 4. Oblicz sumy następujących szeregów:

$$\text{a) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\text{b) } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\text{c) } 1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{5}{10^6} \dots$$

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność następujących szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} n (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$$

Zadanie 6. Korzystając z kryterium porównawczego, zbadaj zbieżność następujących szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1}$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$$