Zajęcia nr 4

Program zajęć: *zastosowanie twierdzenia o trzech ciągach, liczba e, punkty skupienia ciągów*

Zadanie 1. Oblicz granice następujących ciągów:

a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

b) $a_n = \sqrt[n]{3 + \sin n}$

c) $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{5^n+4^n}}$

d) $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$

e) $a_n = \frac{(0{,}9)^n}{n+1}$

f) $a_n = \frac{n}{n^2+1} \sin\left(\frac{13n!}{4\ln(n+3)}\right)$

Zadanie 2. Oblicz granice następujących ciągów:

a) $a_n = (1 + \frac{2}{n})^n$

b) $a_n = (1 - \frac{4}{n})^{3n}$

c) $a_n = (\frac{3n+1}{3n+2})^{6n}$

d) $a_n = (\frac{n^2-1}{n^2})^{2n^2-3}$

Zadanie 3. Pokaż, że ciąg określony następująco: $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin i}{2^i}$ jest zbieżny.

Zadanie 4. Niech (a_n) będzie ciągiem o wyrazach niezerowych takim, że

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q < 1.$$

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Zadanie 5. Uzasadnij, że podane ciągi są zbieżne do zera:

a) $a_n = \frac{100^n}{n!}$

b) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Zadanie 6. Znajdź punkty skupienia, granicę dolna i górną następujących ciągów:

a) $a_n = (-1)^n$

b) $a_n = 1 + 3(-1)^{n+1} + 4(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$

d) $a_n = \frac{n^2}{2n^2+1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

Zadanie 7. Pokaż, że ciąg $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest zbieżny.