Zajęcia nr 3

Program zajęć: *definicja granicy ciągu i definicja ciągu Cauchy'ego, podstawowe własności granic i proste techniki obliczania granic*

Zadanie 1. Korzystając z definicji granicy ciągu uzasadnij podane równości:

a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-n}{n+4} = -1$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+5} = 0$$

Zadanie 2. Uzasadnij, że poniższe ciągi nie są zbieżne:

a) $a_n = (-1)^n$ b) $a_n = \frac{4n^2+1}{2n+3}$

Zadanie 3. Oblicz granice następujących ciągów:

a) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ b) $a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$ c) $a_n = \frac{17}{\sqrt{n+2}}$

d) $a_n = \frac{n^2+3n+1}{4n^2+2}$ e) $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$ f) $a_n = \frac{(2n+1)^2}{-3n^2+3}$

Zadanie 4. Oblicz granice następujących ciągów:

a) $a_n = \frac{2^n+3^n}{3^n+1}$ b) $a_n = \frac{25^n+3^n}{5^{2n+1}+4^n}$ c) $a_n = \frac{2^n+3^n}{4^n+1}$

Zadanie 5. Oblicz granice następujących ciągów:

a) $a_n = (\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n})$ b) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+2n}}{2n+3}$

c) $a_n = \frac{\sqrt[3]{8^{n+1}+3}}{2^n+1}$ d) $a_n = \frac{1+3+...+(2n-1)}{2+4+...+2n}$

Zadanie 6. Uzasadnij, że ciąg dany rekurencyjnie:

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny i wyznacz jego granicę.

Zadanie 7. (Algorytm przybliżania pierwiastka z danej liczby)
Niech $S > 0$ i niech ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie zdefiniowany następująco:

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{S}{a_n}\right) \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywista większą niż $\sqrt{S}$. Uzasadnij, że ciąg ten jest zbieżny i jego granica wynosi $\sqrt{S}$.