

Zajęcia nr 2

Program zajęć: zbiory ograniczone z dołu (z góry), kres dolny i kres górny, definicja ciągu, monotoniczność i ograniczoność ciągu

Zadanie 1. Zbadaj ograniczoność i wyznacz kresy zbiorów:

a) $A = \left\{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$

b) $B = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$

c) $C = \left\{\frac{2}{m} + \frac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

d) $D = \left\{\frac{2}{m} - \frac{3}{n} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

e) $E = \left\{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3}\right\}$

f) $E = \{0.1, 0.11, 0.111, \dots\}$

Zadanie 2. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą niepustymi zbiorami ograniczonymi. Pokaż, że:

a) $\inf(A) \leq \sup(A)$

b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

c) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

Zadanie 3. Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi. Pokaż, że

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\} \leq \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

Podaj przykład funkcji f i g dla których powyższa nierówność jest ostra.

Zadanie 4. Znając kilka początkowych wyrazów ciągu wyznacz jego wzór ogólny.

a) 1, 3, 5, 7, 9, ...

b) 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

c) 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

d) 0.7, 0.77, 0.777, ...

Zadanie 5. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) takiego, że:

a) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$

b) $a_1 = 1, a_{n+1} = (n+1)a_n$

c) $a_1 = 1, a_{n+1} = (n+1) + a_n$

Zadanie 6. Zbadaj monotoniczność i ograniczoność poniższych ciągów:

a) $a_n = \frac{1}{2n+1}$

b) $a_n = \frac{n}{2^n}$

c) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$

e) $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.